2M

УДК 514.116

Л.П. Мироненко, И.К. Локтионов
Донецкий национальный технический университет, Украина

Тригогиперболические функции в математическом анализе (II)

В статье предложена система «элементарных» функций, которая названа тригогиперболическими функциями и обозначена как *six*, *inx*, *cox*, *osx*. Эта система функций является альтернативой обычным тригонометрическим и гиперболическим функциям *sin x*, *cos x*, *shx*, *chx*. Функции введены на основе разделения рядов Маклорена функций *sin x*, *cos x* на положительную и отрицательную части. Так определяются четыре линейно независимые и аналитические функции. В статье изучаются алгебраические и аналитические свойства тригогиперболических функций.

Введение

Хорошо известно, что функции синус и косинус могут представляться абсолютно и равномерно сходящимися на всей вещественной оси степенными рядами. Эти ряды являются знакочередующимися, рядами Лейбница [1-3]. Другими словами, каждая из функций состоит из пары сходящихся рядов противоположного знака. Каждый из этих рядов сходится к некоторой, как следует из их разложений, аналитической функции. На основании такого разделения рядов для синуса и косинуса на пары рядов можно ввести четыре аналитические функции [4]. При этом, как увидим в дальнейшем, разности новых функций соответствуют обычным синусу и косинусу, а сумма – гиперболическим синусу и косинусу, а также экспоненциальной функции. Так возникает единый базис для тригонометрии обычной и гиперболической со своими «тригогиперболическими» соотношениями и свойствами.

Представление тригонометрических и гиперболических функций через новые функции является, по сути, упрощением элементарных функций синуса и косинуса, и служит базисом для практической работы с обычными тригонометрическими и гиперболическими функциями, а также с экспоненциальной функцией. Получив ряд соотношений между новыми базисными четырьмя «тригогиперболическими» функциями, можно работать как с новым набором линейно независимых функций, так и с обычным набором (синус, косинус, гиперболические синус и косинус). С каким набором функций работать удобно, определяется постановкой решаемой задачи.

Целью статьи является введение новой системы функций, которая может быть использована как в математическом анализе, так и в различных областях науки для решения прикладных задач.

В этой работе рассмотрены кратко алгебраические свойства тригогиперболических функций [4] и построен аппарат дифференциального и интегрального исчисления, включая функции комплексной переменной.

1 Определения тригогиперболических функций и основные обозначения

Определим функции six, inx, cox, osx следующими равенствами [4]:

$$\sin x = six - inx, \qquad shx = six + inx,$$
$$\cos x = cox - osx, \qquad chx = cox + osx. \tag{1}$$

В дальнейшем будем эти функции называть соответственно six «си-функция», inx «ин-функция», cox «ко-функция» и osx «ос-функция», а всю совокупность six, inx, cox, osx – тригогиперболическими функциями, кратко ТГ-функции.

Решим систему (1) относительно функций six, inx, cox, osx. Складывая первое и третье равенства, получим выражение для функции six. Вычитая первое и третье равенства, получим выражение для функции inx. Повторяя операции над вторым и четвертым равенствами, получим функции cox, osx. Итак,

$$\begin{aligned} six &= \frac{1}{2}(\sin x + shx), \qquad cox = \frac{1}{2}(\cos x + chx), \\ inx &= \frac{1}{2}(-\sin x + shx), \quad osx = \frac{1}{2}(-\cos x + chx). \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим некоторые следствия из определения (1).

1. Свойства симметрии функций six, inx, cox, osx следуют из определения (1) и свойств симметрии функций $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x, sh(-x) = -shx, ch(-x) = chx.$

$$si(-x) = -six,\ in(-x) = -inx, \quad co(-x) = cox,\ os(-x) = cox. \tag{3}$$

2. Выражение для экспоненциальной функции

$$e^x = six + inx + cox + osx. \tag{4}$$

3. Формула Муавра

$$e^{nx} = si(nx) + in(nx) + co(nx) + os(nx).$$

4. Из равенств (2) следуют некоторые частные значения функций

$$si(0) = 0, \quad in(0) = 0,\ co(0) = 1, \quad os(0) = 0. \tag{5}$$

Запишем нули функции $y = \sin x$: $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z$. Поскольку $\sin x = six - inx$, то $si(\pi n) = in(\pi n), n \in Z$. Аналогично, $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Поскольку $\cos x = cox - osx$, то $co\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = os\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$. Теперь рассмотрим значения $\sin x = \pm 1 \Rightarrow \ x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Откуда следует, что $si\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - in\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \pm 1$. Если $\cos x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\pi + 2\pi n, n \in Z$. Откуда следует, что $co\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = os\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$. Итак,

$$\begin{aligned} &si(\pi n) = in(\pi n), co\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = os\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \\ &co(\pm\pi + 2\pi n) - os(\pm\pi + 2\pi n) = \pm 1 \\ &si\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - in\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \pm 1, n \in Z. \end{aligned} \tag{6}$$

2 Основные алгебраические соотношения для функций *six, inx, cox, osx*

Выведем ряд соотношений, связывающих ТГ-функции *six, inx, cox, osx* с обычными тригонометрическими и гиперболическими функциями

$\sin x \cdot shx = (six - inx)(six + inx) = si^2 x - in^2 x;\ \cos x \cdot chx = (cox - osx)(cox + osx) = co^2 x - os^2 x.$

Откуда,

$$si^2x - in^2x = \sin x \cdot shx, \quad co^2x - os^2x = \cos x \cdot chx. \qquad (7)$$

Откуда следует формула

$$si^2x - in^2x + co^2x - os^2x = \sin x \cdot shx + \cos x \cdot chx.$$

Используя формулы (2), найдем

$$six \cdot osx - inx \cdot cox = \frac{1}{4}\left[(\sin x + shx)(-\cos x + chx) - (-\sin x + shx)(\cos x + chx)\right] =$$

$$= \left[\sin x \cdot chx - \cos x \cdot shx\right]/2.$$

Кратко

$$2(six \cdot osx - inx \cdot cox) = \sin x \cdot chx - \cos x \cdot shx.$$

Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 s = 1$

$$(six - inx)^2 + (cox - osx)^2 = 1, \; si^2x + in^2x + co^2x + os^2x - 2six \cdot inx - 2cox \cdot osx = 1,$$

Аналогично, используем «основное» гиперболическое тождество $ch^2x - sh^2x = 1$

$$(cox + osx)^2 - (six + inx)^2 = 1, \; co^2x + os^2x - si^2x - in^2x + 2cox \cdot osx - 2six \cdot inx = 1,$$

В результате имеем пару соотношений

$$\begin{aligned} &co^2x + os^2x + si^2x + in^2x = 1 + 2(six \cdot inx + cox \cdot osx), \\ &co^2x + os^2x - si^2x - in^2x = 1 + 2(six \cdot inx - cox \cdot osx). \end{aligned} \qquad (8)$$

Складывая и вычитая полученные равенства, получим

$$co^2x + os^2x = 1 + 2six \cdot inx, \quad si^2x + in^2x = 2cox \cdot osx. \qquad (9)$$

Используем формулы двойных аргументов $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и $sh2x = 2shx \cdot chx$

$$\sin 2x = si2x - in2x = 2(six - inx)(cox - osx) = 2six\, cox + 2inx\, osx - 2six\, osx - 2inx\, cox,$$

$$sh2x = si2x + in2x = 2(six + inx)(cox + osx) = 2six\, cox + 2inx\, osx + 2six\, osx + 2inx\, cox,$$

$$si2x = 2(six \cdot cox + inx \cdot osx), \quad in2x = 2(six \cdot osx + inx \cdot cox). \qquad (10)$$

Проверим результат

$$si2x - in2x = 2(six \cdot cox - six \cdot osx + inx \cdot osx - inx \cdot cox) = 2(six\,(cox - osx) + inx(osx - cox)) =$$

$$= 2(six \cos x - inx \cos x) = 2(six - inx)\cos x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Аналогично проверяется равенство $si2x + in2x = sh2x.$

Используем формулы двойных аргументов $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $ch2x = ch^2 2x + + sh^2 2x$ [5]

$$\cos 2x = co2x - os2x = (cox - osx)^2 - (six - inx)^2 = co^2x + os^2 - si^2x - in^2x - 2cox\,osx + 2six\,inx,$$

$$ch2x = co2x + os2x = (cox + osx)^2 + (six + inx)^2 = co^2x + os^2 + si^2x + in^2x + 2cox\,osx + 2six\,inx,$$

$$co2x = co^2x + os^2x + 2six \cdot inx, \quad os2x = si^2x + in^2x + 2cox \cdot osx. \qquad (11.1)$$

Подставив формулы (9), получим более простые выражения

$$co2x = 1 + 4six \cdot inx, \quad os2x = 4cox \cdot osx. \qquad (11.2)$$

Вычитая и складывая выражения, получим

$$\cos 2x = co2x - os2x = 1 + 4six \cdot inx - 4cox \cdot osx,$$

$$ch2x = co2x + os2x = 1 + 4six \cdot inx + 4cox \cdot osx$$

$$\cos 2x = 1 + 4six \cdot inx - 4cox \cdot osx, \quad ch2x = 1 + 4six \cdot inx + 4cox \cdot osx. \qquad (12)$$

Вычитая и складывая равенства, получим еще два соотношения

$$ch2x - \cos 2x = 8cox \cdot osx, \quad ch2x + \cos 2x = 2 + 8six \cdot inx. \qquad (13)$$

Используем формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, подставив формулу (12)

$$\frac{1\pm\cos 2x}{2}=\frac{1\pm(1+4six\cdot inx-4cox\cdot osx)}{2}=\begin{cases}1+2six\cdot inx-2cox\cdot osx),\\ 2(cox\cdot osx-six\cdot inx).\end{cases}$$

$$\sin^2 x=2(cox\cdot osx-six\cdot inx),\quad \cos^2 x=1+2(six\cdot inx-cox\cdot osx). \qquad (14)$$

Используем формулы понижения степени $sh^2x=\frac{ch2x-1}{2}$ и $ch^2x=\frac{1+ch2x}{2}$, подставив (12)

$$\frac{ch2x\pm 1}{2}=\frac{1+4six\cdot inx+4cox\cdot osx\pm 1}{2}=\begin{cases}1+2six\cdot inx+2cox\cdot osx,\\ 2six\cdot inx+2cox\cdot osx.\end{cases}$$

$$ch^2x=1+2six\cdot inx+2cox\cdot osx,\quad sh^2x=2(six\cdot inx+cox\cdot osx). \qquad (15)$$

Найдем тригогиперболические функции для суммы и разности аргументов x и y

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=(six-inx)(coy-osy)+(cox-osx)(siy-iny)=$$
$$=sixcoy-sixosy-inxcoy+inxosy+coxsiy-osxsiy-coxiny+osxiny,$$
$$si(x+y)-in(x+y)=sixcoy+siycox-coxiny-inxcoy-osxsiy-osysix+inxosy+inyosx.$$

Аналогично, для гиперболической функции $sh(x+y)$

$$sh(x+y)=shxchy+chxshy=(six+inx)(coy+osy)+(cox+osx)(siy+iny)=$$
$$=sixcoy+sixosy+inxcoy+inxosy+coxsiy+osxsiy+coxiny+osxiny.$$

В результате получим

$$si(x+y)+in(x+y)=(sixcoy+siycox)+(coxiny+inxcoy)+(osxsiy+osysix)+inxosy+inyosx.$$

Складывая и вычитая равенства для выражений $si(x+y)-in(x+y)$ и $si(x+y)+in(x+y)$, получим

$$\begin{aligned}si(x+y)&=six\cdot coy+siy\cdot cox+inx\cdot osy+iny\cdot osx,\\ si(x-y)&=six\cdot coy-siy\cdot cox+inx\cdot osy-iny\cdot osx,\\ in(x+y)&=cox\cdot iny+inx\cdot coy+osx\cdot siy+osy\cdot six,\\ in(x-y)&=-cox\cdot iny+inx\cdot coy-osx\cdot siy+osy\cdot six.\end{aligned} \qquad (16)$$

Легко проверить, что формулы двойных аргументов $si2x, in2x$ имеют место при $x=y$ и совпадают с формулами (9).

Комбинируя в (16), получим

$$\begin{aligned}&si(x+y)+si(x-y)=2(six\cdot coy+inx\cdot osy),\ in(x+y)+in(x-y)=2(inx\cdot coy+osy\cdot six),\\ &si(x+y)-si(x-y)=2(siy\cdot cox+iny\cdot osx),\ in(x+y)-in(x-y)=2(cox\cdot iny+osx\cdot siy).\end{aligned} \qquad (17)$$

Найдем тригогиперболические функции для суммы и разности аргументов в функциях $\cos(x\pm y)$ и $ch(x\pm y)$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=(cox-osx)(coy-osy)-(six-inx)(siy-iny)=$$
$$=coxcoy-osxcoy-osycox+osxosy-sixsiy+inxsiy+sixiny-inxiny.$$
$$ch(x+y)=chxchy+shxshy=coxcoy+osxcoy+osxcoy+osxosy+sixsiy+inxsiy+sixiny+inxiny.$$
$$co(x+y)-os(x+y)=coxcoy-osxcoy-osycox+osxosy-sixsiy+inxsiy+sixiny-inxiny.$$
$$co(x+y)+os(x+y)=coxcoy+osxcoy+osxcoy+osxosy+sixsiy+inxsiy+sixiny+inxiny.$$

$$\begin{aligned}co(x+y)&=coxcoy+osxosy+inxsiy+sixiny,\\ co(x-y)&=coxcoy+osxosy-inxsiy-sixiny,\\ os(x+y)&=osxcoy+osycox+sixsiy+inxiny,\\ os(x-y)&=osxcoy+osycox-sixsiy-inxiny.\end{aligned} \qquad (18)$$

Формулы двойных аргументов $co2x, os2x$ следуют при $x = y$ и совпадают с формулами (10).

$$\begin{aligned} &co(x+y)+co(x-y)=2(coxcoy+osxosy),\ os(x+y)+os(x-y)=2(osxcoy+osycox),\\ &co(x+y)-co(x-y)=2(sixiny+inxsiy),\quad os(x+y)-os(x-y)=2(sixsiy+inxiny). \end{aligned} \tag{19}$$

3 Пределы и производные от функций *six, inx, cox, osx*

Дифференцируем равенства (2)

$$(six)'=\frac{1}{2}(\sin x+shx)'=\frac{1}{2}(\cos x+chx)=cox,\qquad (cox)'=\frac{1}{2}(\cos x+chx)'=\frac{1}{2}(-\sin x+shx)=inx,$$

$$(inx)'=\frac{1}{2}(-\sin x+shx)'=\frac{1}{2}(-\cos x+chx)=osx,\ (osx)'=\frac{1}{2}(-\cos x+chx)'=\frac{1}{2}(\sin x+shx)=six.$$

В результате имеем

$$(six)'=cox,\ (cox)'=inx,\ (inx)'=osx,\ (osx)'=six. \tag{20}$$

Вычислим производные высших порядков

$$\begin{aligned} &(six)'=cox, &&(six)'''=(cox)''=(inx)'=osx,\\ &(six)''=(cox)'=inx, &&(six)^{(IV)}=(cox)'''=(inx)''=(osx)'=six. \end{aligned} \tag{21}$$

Как видно, каждая четвертая производная от любой из ТГ-функций возвращает ее к исходной функции.

Производные от ТГ-функций можно ввести по определению производной [6]

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{22}$$

Для определения производной функции используем формулу (16)

$$si(x+\Delta x)=six\cdot co\Delta x+si\Delta x\cdot cox+inx\cdot os\Delta x+in\Delta x\cdot osx,$$

$$(si(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{si(x+\Delta x)-si(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{six\cdot co(\Delta x)+si(\Delta x)\cdot cox+inx\cdot os(\Delta x)+in(\Delta x)\cdot osx-six}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{six\cdot co(\Delta x)-six}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{si(\Delta x)\cdot cox}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{inx\cdot os(\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{in(\Delta x)\cdot osx}{\Delta x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{six\cdot(co(\Delta x)-1)}{\Delta x}=0,\quad \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{inx\cdot os(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{in(\Delta x)\cdot osx}{\Delta x}=0$,

то $(si(x))'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{si(\Delta x)\cdot cox}{\Delta x}=cox\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{si(\Delta x)}{\Delta x}=cox.$

Аналогом первого стандартного предела является предел [7]

$$\lim_{x\to 0}\frac{si(x)}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1. \tag{23}$$

В связи с первым стандартным «тригогиперболическим» пределом следует иметь в виду равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{in(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{os(x)}{x}=0, \tag{24}$$

которые следуют из разложений (2) в ряд Маклорена. Действительно, как следует из разложений (2), асимптотика ТГ-функций при $x\to 0$ имеет вид

$$cox\approx 1+x^5/5!,\quad sixx\approx x,\quad osx\approx x^2/2!,\quad inx\approx x^3/3!.$$

Заметим, что правило Лопиталя для ТГ-функций в отношении экспоненциальной функции e^x при $x\to\infty$ не работает.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{six}{e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(six)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{cox}{e^x} \text{ и т.д. } \lim_{x\to\infty}\frac{six}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{cox}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{inx}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{osx}{e^x}=?$$

Это свидетельствует о том, что правило Лопиталя не работает для некоторых пределов, связанных с ТГ-функциями six, cox, inx, osx.

Тем не менее, предел существует и его легко вычислить, если использовать выражение для функции $six=\frac{1}{2}(\sin x+shx)=\frac{1}{2}(\sin x+\frac{e^x-e^{-x}}{2})$. Отсюда видно, что $\lim_{x\to\infty}\frac{six}{e^x}=\frac{1}{4}$. Аналогично устанавливаем $\lim_{x\to\infty}\frac{cox}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{inx}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{osx}{e^x}=\frac{1}{4}$. Эти результаты дают асимптотическое поведение функций six, cox, inx, osx при $x\to\infty$

$$six\approx cox\approx inx\approx osx\approx e^x/4.$$

При этом ясно, что $six+cox+inx+osx\underset{x\to\infty}{\approx}4\cdot\frac{1}{4}e^x=e^x.$

Точно так, правило Лопиталя не работает, если в знаменателе есть любая из ТГ-функций six,cox,inx,osx. Например, $\lim_{x\to\infty}\frac{six}{cox}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, но, как следует из последнего равенства $\lim_{x\to\infty}\frac{six}{cox}=\lim_{x\to\infty}\frac{six}{inx}=1$ и т.д. Правило Лопиталя работает в большинстве случаев неопределенностей

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-co(x)}{x^4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-co(x))'}{(x^4)'}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{in(x)}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Применим правило Лопиталя еще три раза и получим $\lim_{x\to 0}\frac{1-co(x)}{x^4}=-\frac{1}{4!}$.

Приведем еще один пример применения правила Лопиталя, когда его применяют n раз

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{si(x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^n)^{(n)}}{(si(x))^{(n)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{(si(x))^{(n)}}=0.$$

Производная $(si(x))^{(n)}$ дает одну из функций six,ox,inx,osx (в зависимости от значения n), а числитель дроби равен постоянной. Поэтому, применяя еще раз правило Лопиталя, получим нуль.

Сделаем несколько замечаний относительно линейной независимости ТГ-функций. Для чего выпишем определитель Вронского W системы функций *six, inx, cox, osx* [8], [9]

$$W(x)=\begin{vmatrix} cox & six & osx & inx \\ (cox)' & (six)' & (six)' & (inx)' \\ (cox)'' & (six)'' & (six)'' & (inx)'' \\ (cox)''' & (six)''' & (six)''' & (inx)''' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} cox & six & osx & inx \\ inx & cox & six & osx \\ osx & inx & cox & six \\ six & osx & inx & cox \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

В частности, в точке $x=0$ имеем $W=|E|=1,\ E$ – единичная матрица.

Вычисление определителя, приведенный в приложении, дает $W=1$. Как видно, определитель Вронского не равен нулю ни при каких $x\in R$, что свидетельствует о линейной независимости ТГ-функций на всей числовой оси (Приложение).

4 Ряды Маклорена ТГ-функций

Запишем ряд Маклорена произвольной функции $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ [8]. Учтем «периодичность» производных (6) и $si(0)=in(0)=os(0)=0,\ co(0)=1$. В результате получим разложения ТГ-функций. Покажем это на примере функции $f(x)=si(x)$.

$$f(x)=six,\quad f(0)=si(0)=0,\qquad f''(x)=(cox)'=inx, f''(0)=in(0)=0,$$

$$f'(x)=(six)'=cox, f'(0)=co(0)=1,\ f'''(x)=(inx)'=osx, f'''(0)=os(0)=0,$$

$$f^{(IV)}(x)=(osx)'=six, f^{(IV)}(0)=si(0)=0,..., f^{(4n+1)}(0)=co(0)=1.$$

Подставляя это выражение в ряд Маклорена, получим

$$si(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}=x+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+...$$

Аналогично находим отличные от нуля производные для остальных функций $in^{4n+3}(0)=1,\ co^{4n}(0)=1,\ \ os^{4n+2}(0)=1$. В результате получим представление ТГ-функций в виде степенных рядов

$$six=x+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!},\qquad cox=1+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!},$$

$$inx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{11}}{11!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!},\ \ osx=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^{10}}{10!}....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{(4n)!}.$$

Сравним со стандартными степенными рядами

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Сравнивая ряды для тригонометрических $\sin x, \cos x$ и гиперболических функций shx, chx и функции e^x с определениями ТГ-функций (1), (2), получим согласие с определениями (1).

Ряды функций six, inx, cox, osx сходятся абсолютно и равномерно на всей вещественной оси, что легко проверяется с помощью признака Даламбера сходимости рядов [10]. Продемонстрируем это на примере функции $y=six$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x^{4(n+1)+1}}{(4(n+1)+1)!}\right|/\left|\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x^4(4n+1)!}{(4(n+1)+1)!}\right|=x^4\lim_{x\to\infty}\frac{(4n+1)!}{(4n+5)!}=0.$$

Равенство нулю предела означает, что признак Даламбера выполняется для всех $x\in R$.

5 Некоторые соотношения для ТГ-функций комплексного аргумента

Подставляя в разложения функций six, inx, cox, osx вместо переменной x переменную ix и учитывая, что $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$, получим

$$si(ix) = ix + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^9x^9}{9!} + ... = i \cdot six, \qquad co(ix) = 1 + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^8x^8}{8!} + ... = cox,$$

$$in(ix) = \frac{i^3x^3}{3} + \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^{11}x^{11}}{11!} + ... = -i \cdot inx, \quad os(ix) = \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^{10}x^{10}}{10!} .... = -osx.$$

В результате получим соотношения для ТГ-функций мнимого аргумента

$$si(ix) = i \cdot six, \quad in(ix) = -i \cdot inx, \quad co(ix) = cox, \quad os(ix) = -osx. \qquad (26)$$

Легко проверяются равенства

$$\begin{aligned} \sin(ix) &= si(ix) - in(ix) = i(six + inx) = i \cdot shx, \\ \cos(ix) &= co(ix) - os(ix) = cox + osx = chx, \\ sh(ix) &= si(ix) + in(ix) = i(six - inx) = i \cdot \sin x, \\ ch(ix) &= co(ix) + os(ix) = cox - osx = \cos x. \end{aligned} \qquad (27)$$

$$e^{ix} = si(ix) + in(ix) + co(ix) + os(ix) = i(six - inx) + cox + osx = \cos x + i \sin x .$$

Подставим эти выражения в формулы (2)

$$\begin{aligned} six &= \frac{1}{2}(shx - i \cdot sh(ix)), & six &= \frac{1}{2}(\sin x - i \cdot \sin(ix)), \\ inx &= \frac{1}{2}(shx + i \cdot sh(ix)), & inx &= -\frac{1}{2}(\sin x + i \cdot \sin(ix)), \\ cox &= \frac{1}{2}(chx + ch(ix)), & cox &= \frac{1}{2}(\cos(ix) + \cos x), \\ osx &= \frac{1}{2}(chx - ch(ix)). & osx &= \frac{1}{2}(\cos(ix) - \cos x). \end{aligned} \qquad (28)$$

Запишем формулы (16) – (19) для комплексной переменной $z = x + iy$

$$si(x+iy) = sixcoy - inxosy + i(siycox - inyosx), \quad in(x+iy) = inxcoy - osysix + i(osxsiy - coxiny),$$

$$si(x-iy) = sixcoy - nxosy + i(inyosx - siycox), \quad in(x-iy) = inxcoy - osysix + i(coxiny - osxsiy),$$

$$\begin{aligned} si(x+iy) + si(x-iy) &= 2(sixcoy - inxosy), & in(x+iy) + in(x-iy) &= 2(inxcoy - osysix), \\ si(x+iy) - si(x-iy) &= 2i(siycox - inyosx), & in(x+iy) - in(x-iy) &= 2i(osxsiy - coxiny), \end{aligned} \qquad (29)$$

$$\begin{aligned} co(x+iy) &= coxcoy - osxosy - i \cdot (sixiny - inxsiy), \\ co(x-iy) &= coxcoy - osxosy - i \cdot (inxsiy - sixiny), \\ os(x+y) &= osxcoy - osycox - i \cdot (sixsiy + inxiny), \\ os(x-y) &= osxcoy - osycox - i \cdot (sixsiy - inxiny), \end{aligned} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned} co(x+iy) + co(x-iy) &= 2(coxcoy - osxosy), & os(x+iy) + os(x-iy) &= 2(osxcoy - osycox), \\ co(x+iy) - co(x-iy) &= 2i(inxsiy - sixiny), & os(x+iy) - os(x-iy) &= 2i(sixsiy - inxiny). \end{aligned} \qquad (31)$$

Покажем, что функции siz, inz, coz, osz являются аналитическими во всей комплексной плоскости z. Для этого запишем условия Коши-Римана функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \ [9]$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \qquad (32)$$

Рассмотрим функцию $si(z) = u(x,y) + iv(x,y) = sixcoy - inxosy + i(siycox - inyosx)$. Здесь $u(x,y) = sixcoy - inxosy$, $\quad v(x,y) = siycox - inyosx$

$$\begin{cases} u'_x(x,y) = (sixcoy - inxosy)'_x = coxcoy - osxosy, \\ v'_y(x,y) = (siycox - inyosx)'_y = coycox - osyosx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_y(x,y) = (sixcoy - inxosy)'_y = sixiny - inxsiy, \\ -v'_x(x,y) = -(siycox - inyosx)'_x = -siyinx + inysix. \end{cases}$$

Как видно, условия Коши-Римана выполняются. Аналогично проверяется свойство аналитичности остальных функций.

Построим две функции комплексной переменной

$$f_1(z) = co(z) + i \cdot si(z), \quad f_2(z) = os(z) + i \cdot in(z). \qquad (33)$$

Проверим их аналитичность

$$f_1(z) = co(x+iy) + i \cdot si(x+iy) = coxcoy - osxosy - i \cdot (sixiny - inxsiy) +$$
$$+ i \cdot (sixcoy - inxosy) + i \cdot i(siycox - inyosx) =$$
$$= (coxcoy - osxosy - siycox + inyosx) + i \cdot (sixcoy - inxosy - sixiny + inxsiy),$$
$$u_1(z) = \operatorname{Re} f_1(x+iy) = coxcoy - osxosy - siycox + inyosx,$$
$$v_1(z) = \operatorname{Im} f_1(x+iy) = sixcoy - inxosy - sixiny + inxsiy,$$

$$\begin{cases} u'_x(x,y) = inxcoy - sixosy - siyinx + inysix, \\ v'_y(x,y) = sixiny - inxsiy - sixosy + inxcoy, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_y(x,y) = coxiny - osxsiy - coycox + osyosx, \\ -v'_x(x,y) = -(coxcoy - osxosy - coxiny + osxsiy). \end{cases}$$

Некоторые аналитические функции получим дифференцированием $f_1(z) = co(z) + i \cdot si(z)$, в том числе докажем свойство аналитичности функции $f_2(z)$

$$f_1'(z) = in(z) + i \cdot co(z), \qquad f_1''(z) = si(z) + i \cdot os(z),$$
$$f_1'''(z) = os(z) + i \cdot in(z) = f_2(z), \qquad f_1^{(IV)}(z) = co(z) + i \cdot si(z) = f_1(z).$$

Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ привлекательны тем, что

$$f_1(z) - f_2(z) = co(z) - os(z) + i \cdot (si(z) - in(z)) = \cos(z) + i \cdot \sin(z) = e^{iz},$$
$$f_1(z) + f_2(z) = co(z) + os(z) + i \cdot (si(z) + in(z)) = ch(z) + i \cdot sh(z),$$
$$|f_1(z)|^2 = f_1(z) f_1^*(z) = (\cos(z) + i \cdot siv(z))(\cos(z) - i \cdot \sin(z)) = \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1,$$
$$|f_2(z)|^2 = f_2(z) f_2^*(z) = (ch(z) + i \cdot sh(z))(ch(z) - i \cdot sh(z)) = ch^2(z) + sh^2(z) = ch(2z).$$

6 Интегралы от ТГ-функций

Неопределенные интегралы от ТГ-функций определяются обычно, то есть как операция нахождения совокупности первообразных $\int f(x)dx + C$ данной функции $f(x)$. По известным производным $(osx)' = six$, $(six)' = cox$, $(cox)' = inx$, $(inx)' = osx$ находим

$$\int sixdx = osx + C, \qquad \int coxdx = six + C,$$
$$\int inxdx = cox + C, \qquad \int osxdx = inx + C. \qquad (34)$$

Запишем несколько простейших интегралов, которые проверяются непосредственным дифференцированием

$$\int (six\cdot cox)dx=\frac{1}{2}si^2x+C,\ \int (inx\cdot osx)dx=\frac{1}{2}in^2x+C,$$
$$\int (cox\cdot inx)dx=\frac{1}{2}co^2x+C,\ \int (osx\cdot six)dx=\frac{1}{2}os^2x+C. \qquad (35)$$

Используем формулу $\cos 2x=1+4six\cdot inx-4cox\cdot osx$. Интегрируя равенство, находим $\int \cos 2xdx=x+4\int (six\cdot inx)dx-4\int (cox\cdot osx)dx.$ Аналогично, используем формулу $ch2x=1+4six\cdot inx+4cox\cdot osx$. Откуда, $\int ch2xdx=x+4\int (six\cdot inx)dx+4\int (cox\cdot osx)dx,$
$\int (six\cdot inx)dx=\frac{sh2x}{8}+\frac{\sin 2x}{8}-\frac{x}{2}+C.$

Складываем и вычитаем формулы

$\int ch2xdx+\int \cos 2xdx=2x+8\int (six\cdot inx)dx,\quad \int (six\cdot inx)dx=\frac{sh2x+\sin 2x}{16}-\frac{x}{4}+C=\frac{si2x}{8}-\frac{x}{4}+C,$

$\int ch2xdx-\int \cos 2xdx=8\int (cox\cdot osx)dx,\qquad \int (cox\cdot osx)dx=\frac{sh2x-\sin 2x}{16}+C=\frac{in2x}{8}+C.$

Получим формулы

$$\int (cox\cdot osx)dx=\frac{in2x}{8}+C,\quad \int (six\cdot inx)dx=\frac{si2x}{8}-\frac{x}{4}+C. \qquad (36)$$

Рассмотрим интегралы от квадратов ТГ-функций

$$\int si^2xdx=\int sixd(osx)=\begin{Bmatrix} u=six\Rightarrow du=coxdx \\ dv=sixdx\Rightarrow v=osx\end{Bmatrix}=six\cdot osx-\int cox\cdot osxdx=six\cdot osx-\frac{in2x}{8}+C.$$

Здесь использован интеграл (36). Аналогично рассматриваются остальные интегралы.

$$\int in^2xdx=\int inxd(cox)=inx\cdot cox-\int osx\cdot coxdx=inx\cdot cox-\frac{in2x}{8}+C \text{ и т.д.}$$

Результаты сведем в таблицу

$$\int si^2xdx=six\cdot osx-\frac{in2x}{8}+C,\qquad \int co^2xdx=cox\cdot six-\frac{si2x}{8}+\frac{x}{4}+C,$$
$$\int in^2xdx=inx\cdot cox-\frac{in2x}{8}+C,\qquad \int os^2xdx=inx\cdot osx-\frac{si2x}{8}+\frac{x}{4}+C. \qquad (37)$$

Проверим первую из формул: $\left(six\cdot osx-\frac{in2x}{8}\right)'=cox\cdot osx+si^2x-\frac{os2x}{4}=si^2x.$ Здесь использована формула (11): $os2x=4cox\cdot osx$.

Проверим формулы в совокупности. Складываем интегралы и соответственно правые части

$$\int (si^2x+in^2x+co^2x+os^2x)dx=six\cdot osx+cox\cdot six+inx\cdot cox+inx\cdot osx-\frac{sh2x}{4}+\frac{x}{2}+C.$$

Производная правой части равенства равна

$cox\cdot osx+si^2x+inx\cdot six+co^2x+osx\cdot cox+in^2x+inx\cdot six+os^2x-2six\cdot inx-2cox\cdot osx=$
$=si^2x+co^2x+in^2x+os^2x.$

Здесь использована формула $ch2x=1+4six\cdot inx+4cox\cdot osx$.

Интегралы

$$\int si^nxdx,\ \int in^nxdx,\ \int co^nxdx,\ \int os^nxdx$$

выражаются через интегралы вида $\int \sin^k x \cdot e^{mx} dx,\ \int \cos^k x \cdot e^{mx} dx$, в частности, через интегралы $\int \sin^k x dx,\ \int \cos^k x dx,\ \int e^{mx} dx,\ \int e^{mx} dx$ (когда одно из чисел k или m равно нулю). Это следует из выражения (2) ТГ-функций через тригонометрические и гиперболические функции и последующим применением бинома Ньютона.

Рассмотрим интегралы, берущиеся по частям. Наиболее простыми являются интегралы вида

$$\int x^n \cdot sixdx,\ \int x^n \cdot indx,\ \int x^n \cdot coxdx,\ \int x^n \cdot osxdx. \qquad (38)$$

Интегрирование по частям выполняется n раз, всякий раз в качестве u берется x в соответствующей степени. Продемонстрируем примером

$$\int x^2 \cdot sixdx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = sixdx \Rightarrow v = osx \end{matrix} \right\} = x^2 osx - 2\int x \cdot osxdx,$$

$$\int x \cdot osxdx = \left\{ \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = osxdx \Rightarrow v = inx \end{matrix} \right\} = x \cdot inx - \int inxdx = x \cdot inx - cox,$$

$$\int x^2 \cdot sixdx = x^2 osx - 2x \cdot inx - +2cox + C.$$

Интегралы

$$\int six \cdot e^x dx,\ \int cox \cdot e^x dx,\ \int inx \cdot e^x dx,\ \int osx \cdot e^x dx \qquad (39)$$

также вычисляются по частям как возвратные интегралы [2], [3]. При этом интегрирование выполняется четыре раза, всякий раз в качестве u обозначается либо ТГ-функция, либо функция e^x. Однако вычисления можно провести иначе, представив экспоненту через сумму ТГ-функций

$$\int six \cdot e^x dx = \int six(six + inx + cox + osx)dx = \int si^2 xdx + \int six \cdot inxdx + \int six \cdot coxdx + \int six \cdot osdx =$$

$$= six \cdot osx - \frac{in2x}{8} + \frac{si2x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} si^2 x + \frac{1}{2} os^2 x + C = \frac{si2x - in2x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}(six + osx)^2 + C$$

Аналогично вычислим подобные интегралы, результаты сведем в таблицу

$$\begin{gathered} \int six \cdot e^x dx = \frac{\sin 2x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}(six + osx)^2 + C,\quad \int cox \cdot e^x dx = -\frac{\sin 2x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}(six + cox)^2 + C, \\ \int inx \cdot e^x dx = \frac{\sin 2x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}(inx + cox)^2 + C,\quad \int osx \cdot e^x dx = -\frac{\sin 2x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}(inx + osx)^2 + C. \end{gathered} \qquad (40)$$

Проверим результат, складывая почленно интегралы. Слева получим $\int e^x \cdot e^x dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$, справа

$$\frac{1}{2}(six + osx)^2 + \frac{1}{2}(inx + cox)^2 + \frac{1}{2}(six + cox)^2 + \frac{1}{2}(inx + osx)^2 + C =$$

$$= si^2 x + os^2 x + co^2 x + in^2 x + sixosx + inxcox + sixcox + inxosx =$$

$$= \frac{1}{2}(si2x + os2x + co2x + in2x)^2 = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Здесь использованы формулы (10) и (11), согласно которым

$$si2x + in2x + co2x + os2x = co^2 x + os^2 + si^2 x + in^2 x +$$

$$+ 2(six \cdot inx + cox \cdot osx + six \cdot cox + inx \cdot osx + six \cdot osx + inx \cdot cox).$$

Интегралы

$$\int six\cdot\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx,\ \int cox\cdot\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx,\ \int inx\cdot\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx,\ \int osx\cdot\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}dx \qquad (41)$$

также вычисляются по частям как возвратные интегралы [2-4]. При этом интегрирование выполняется четыре раза, всякий раз в качестве u используется ТГ-функция. Однако вычисления можно провести иначе, представив $\sin x = six - inx,\ \cos x = cox - osx.$ Продемонстрируем на примере.

$$\int six\cdot\sin xdx = \int si^2xdx - \int six\cdot inxdx = six\cdot osx - \frac{sh2x}{8} + \frac{x}{4} + C,$$

$$\int six\cdot\cos xdx = \int six\cdot coxdx - \int six\cdot osxdx = \frac{1}{2}(si^2x - os^2x) + C. \qquad (42)$$

Аналогично,

$$\int cox\cdot\sin xdx = \frac{1}{2}(si^2x - co^2x) + C,$$

$$\int inx\cdot\cos xdx = \frac{1}{2}(co^2x - in^2x) + C, \qquad (43)$$

$$\int osx\cdot\sin xdx = \frac{1}{2}(os^2x - in^2x) + C.$$

$$\int cox\cdot\cos xdx = cox\cdot six - \frac{sh2x}{8} + \frac{x}{4} + C,$$

$$\int inx\cdot\sin xdx = \frac{sh2x}{8} - \frac{x}{4} - inx\cdot cox + C, \qquad (44)$$

$$\int osx\cdot\cos xdx = \frac{sh2x}{8} - inx\cdot osx - \frac{x}{4} + C.$$

Теперь возвратный интеграл $\int e^x\cdot\sin xdx$ вычисляется иначе

$$\int e^x\cdot\sin xdx = \int(six + cox + inx + osx)\sin xdx =$$

$$= six\cdot osx - inx\cdot cox + \frac{1}{2}(si^2x - co^2x + os^2x - in^2x) =$$

$$= \frac{1}{2}((\sin x\cdot(chx + shx) - \cos x\cdot(shx + chx)) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C.$$

Здесь использованы формулы

$$six\cdot osx - inx\cdot cox = \frac{1}{4}((\sin x + shx)(-\cos x + chx) - (-\sin x + shx)(\cos x + chx)) =$$

$$= \frac{1}{2}((\sin x\cdot chx - \cos x\cdot shx), \qquad si^2x - co^2x + os^2x - in^2x = \sin x\cdot shx - \cos x\cdot chx.$$

Рассмотрим вопрос об интегралах, которые не выражаются через элементарные функции. Хорошо известно, что к их числу относятся интегралы $\int\frac{e^x}{x^n}dx$, $n > 1$, $\int e^{x^2}dx$.

Подставляя в этот интеграл $e^x = six + cox + osx + inx$, получим интегралы, которые не выражаются через элементарные функции

$$\int\frac{six}{x^n}dx,\ \int\frac{cox}{x^n}dx,\ \int\frac{inx}{x^n}dx,\ \int\frac{osx}{x^n}dx,\ \int si(x^2)dx,\ \int co(x^2)dx,\ \int in(x^2)dx,\ \int os(x^2)dx.$$

Аналогично рассматриваются другие интегралы, например, эллиптические интегралы первого и второго рода и др.

7 Ряды Фурье ТГ-функций

Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ [10-12]

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx), \tag{45}$$

где a_n и b_n – коэффициенты Фурье.

Для определенности возьмем $f(x)=six$. Найдем коэффициенты разложения, учитывая, что функция six является нечетной. В этом случае коэффициенты Фурье $a_n=0$. Ряд Фурье принимает вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx),\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(mx)dx\,. \tag{46}$$

Вычислим неопределенный интеграл $\int six\cdot\sin(mx)dx$, интегрируя четыре раза по частям

$$I=\int six\cdot\sin(mx)dx=\left\{\begin{matrix}u=six\Rightarrow du=coxdx\\ dv=\sin(mx)dx\Rightarrow v=-\dfrac{\cos(mx)}{m}\end{matrix}\right\}=-six\cdot\frac{\cos(mx)}{m}+\frac{1}{m}\int cox\cdot\cos(mx)xdx,$$

$$\frac{1}{m}\int cox\cdot\cos(mx)dx=\left\{\begin{matrix}u=cox\Rightarrow du=inxdx\\ dv=\cos(mx)dxx\Rightarrow v=\dfrac{\sin(mx)}{m}\end{matrix}\right\}=cox\cdot\frac{\sin(mx)}{m^2}-\frac{1}{m^2}\int inx\cdot\sin(mx)dx,$$

$$-\frac{1}{m^2}\int inx\cdot\sin(mx)dx=\left\{\begin{matrix}u=inx\Rightarrow du=osxdx\\ dv=\sin(mx)dxx\Rightarrow v=-\dfrac{\cos(mx)}{m}\end{matrix}\right\}=inx\cdot\frac{\cos(mx)}{m^3}-\frac{1}{m^3}\int osx\cdot\cos(mx)dx,$$

$$-\frac{1}{m^3}\int osx\cdot\cos(mx)dx=\left\{\begin{matrix}u=osx\Rightarrow du=sixdx\\ dv=\cos(mx)dxx\Rightarrow v=\dfrac{\sin(mx)}{m}\end{matrix}\right\}=-osx\cdot\frac{\sin(mx)}{m^4}+\frac{1}{m^4}I,$$

$$I=-six\cdot\frac{\cos(mx)}{m}+cox\cdot\frac{\sin(mx)}{m^2}+inx\cdot\frac{\cos(mx)}{m^3}-osx\cdot\frac{\sin(mx)}{m^4}+\frac{1}{m^4}I,$$

Откуда

$$\int six\cdot\sin(mx)dx=\frac{m^4}{m^4-1}(-six\cdot\frac{\cos(mx)}{m}+cox\cdot\frac{\sin(mx)}{m^2}+inx\cdot\frac{\cos(mx)}{m^3}-osx\cdot\frac{\sin(mx)}{m^4}),$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}six\cdot\sin(mx)dx=\frac{2m^3\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}(-si\pi+\frac{in\pi}{m^2}),\ \ m\neq 1. \tag{47}$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}six\cdot\sin(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(si\pi\cdot os\pi-\frac{sh2\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь использован интеграл $\int six\cdot\sin xdx=six\cdot osx-\dfrac{sh2x}{8}+\dfrac{x}{4}+C.$

Теперь рассмотрим нечетную функцию $f(x)=inx$, ее разложение содержит только коэффициенты b_n и совпадает с разложением (46). В этом случае коэффициенты разложения имеют вид

$$b'_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} inx \cdot \sin(mx)dx = \frac{2m^3\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}(-in\pi + \frac{si\pi}{m^2}),\ m \neq 1, \quad (48)$$

$$b'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} inx \cdot \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(-in\pi \cdot co\pi + \frac{sh2\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь использован интеграл $\int inx \cdot \sin(x)dx = \frac{sh2x}{8} - \frac{x}{4} - inx \cdot cox$.

Проверим разложение для функции $f(x) = \sin(x) = si(x) - in(x)$. Коэффициенты разложения при $m \neq 1$

$$b''_m = b_m - b'_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(six - inx) \cdot \sin(mx)dx = \frac{2m^3\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}(-si\pi + \frac{in\pi}{m^2} + in\pi - \frac{si\pi}{m^2}) =$$

$$= -\frac{2m^3\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)(si\pi - in\pi) = -\frac{2m\cos(m\pi)}{\pi(m^2-1)}\sin\pi = 0.$$

При $m = 1$

$$b''_1 = b_1 - b'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(six - inx) \cdot \sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx = 1.$$

Как видно, в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ остается лишь член $b_1 = 1$, что совпадает с функцией $\sin(x)$.

Замечание. Коэффициент $b''_1 = 1$ можно получить иначе, записав его явные выражения для b_1 и b'_1 .

$$b''_1 = b_1 - b'_1 = \frac{2}{\pi}\left(si\pi \cdot os\pi - \frac{sh2\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{\pi}\left(-in\pi \cdot co\pi + \frac{sh2\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(si\pi \cdot os\pi + in\pi \cdot co\pi - \frac{sh2\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Используем равенство $sh2x = si2x + in2x = 2six\ cox + 2inx\ osx + 2six\ osx + 2inx\ cox,$, в котором при $x = \pi n$ имеем $si\pi n = in\pi n$ и поэтому $sh2\pi = 4(si\pi \cdot os\pi + in\pi \cdot co\pi)$. Откуда следует, что $b''_1 = 1$.

Рассмотрим четную функцию $f(x) = cox$. Найдем коэффициенты разложения, учитывая, что функция cox является четной. В этом случае коэффициенты Фурье $b_n = 0$. Ряд (45) и коэффициенты Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx. \quad (49)$$

Вычислим неопределенный интеграл $\int cox \cdot \cos(mx)dx$, интегрируя четыре раза по частям

$$\int cox \cdot \cos(mx)dx = \frac{m^4}{m^4-1}(cox \cdot \frac{\sin(mx)}{m} + inx \cdot \frac{\cos(mx)}{m^2} - osx \cdot \frac{\sin(mx)}{m^3} - six \cdot \frac{\cos(mx)}{m^4}),$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cox \cdot \cos(mx)dx = \frac{2m^2\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}(in\pi - \frac{si\pi}{m^2}),\ m \neq 1, \quad (50)$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} coxdx = \frac{1}{\pi}six\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2si\pi}{\pi}, \quad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cox \cdot \cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(co\pi \cdot si\pi - \frac{sh2\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь использован интеграл $\int cox \cdot \cos x dx = cox \cdot six - \frac{sh2x}{8} + \frac{x}{4} + C.$

Теперь рассмотрим четную функцию $f(x) = osx$, ее разложение содержит только коэффициенты a_n и совпадает с разложением (49). В этом случае коэффициенты разложения имеют вид

$$a'_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} osx \cdot \cos(mx)dx = \frac{2m^2\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}(si\pi - \frac{in\pi}{m^2}),\ m \neq 1, \quad (51)$$

$$a'_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} osxdx = \frac{1}{\pi} inx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2in\pi}{\pi}, \quad a'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} osx \cdot \cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{sh2\pi}{8} - in\pi \cdot os\pi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь использован интеграл $\int osx \cdot \cos x dx = \frac{sh2x}{8} - inx \cdot osx - \frac{x}{4} + C.$

Так же, как для коэффициентов b_m, проверим разложение в ряд Фурье для функции $f(x) = \cos(x) = co(x) - os(x)$. Коэффициенты разложения при $m \neq 1$

$$a''_m = a_m - a'_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(cox - osx) \cdot \cos(mx)dx = \frac{2m^2\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}(in\pi - \frac{si\pi}{m^2} - si\pi + \frac{in\pi}{m^2}) =$$

$$= -\frac{2m^2\cos(m\pi)}{\pi(m^4-1)}\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)(si\pi - in\pi) = -\frac{2m\cos(m\pi)}{\pi(m^2-1)}\sin\pi = 0.$$

$$a''_1 = a_1 - a'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(cox - osx) \cdot \cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 + \cos(2x)}{2}dx = 1.$$

$$a''_o = a_o - a'_o = \frac{2si\pi}{\pi} - \frac{2in\pi}{\pi} = \frac{2\sin\pi}{\pi} = 0.$$

Как видно, в ряде (49) остается лишь член $a_1 = 1$, что совпадает с функцией $\cos(x)$.

Замечание. Коэффициент $a''_1 = 1$ можно получить иначе, записав его явные выражения для a_1 и a'_1.

$$a''_1 = a_1 - a'_1 = \frac{2}{\pi}\left(co\pi \cdot si\pi - \frac{sh2\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right). - \frac{2}{\pi}\left(\frac{sh2\pi}{8} - in\pi \cdot os\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(in\pi \cdot os\pi + co\pi \cdot si\pi - \frac{sh2\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Используем равенство $sh2x = si2x + in2x = 2six\,cox + 2inx\,osx + 2six\,osx + 2nx\,cox$, в котором при $x = \pi n$ имеем $si\pi n = in\pi n$ и поэтому $sh2\pi = 4(si\pi \cdot co\pi + in\pi \cdot os\pi)$. Откуда следует, что $b''_1 = 1$.

Сравнивая коэффициенты разложения (47) – (50), имеем равенства

$$b_m = -ma'_m,\ b'_m = -ma_m. \quad (52)$$

Заключение

Предложены альтернативные тригонометрическим и гиперболическим функциям система «фундаментальных» («элементарных») функций на основе перестройки стандартных степенных рядов для функций $\sin x, \cos x, shx, chx$. Перестраивая абсолютно сходящиеся ряды, введены четыре линейно независимые функции, которые условно обозначены как six, inx, cox, osx и названы тригогиперболическими функциями (ТГ-

функции). Эти функции выражаются через обычные функции взаимно однозначно. Для них рассмотрен следующий спектр математических возможностей:

1. Получены алгебраические соотношения между ТГ-функциями, а также между ТГ-функциями и обычными тригонометрическими и гиперболическими функциями.

2. Рассмотрена теория пределов.

3. Построен аппарат дифференциального исчисления.

4. Произведено аналитическое продолжение ТГ-функций в комплексную область и записаны основные соотношения для ТГ-функций комплексного переменного.

5. Построен аппарат интегральное исчисление.

6. Получены коэффициенты Фурье ТГ-функций.

Необычные соотношения между тригогиперболическими функциями, а также необычный аппарат дифференциального и интегрального исчисления делают теорию достаточно сложной. Более того, математический аппарат в новых функциях имеет значительные ограничения в сравнении с классическим и требует определенной сноровки и опыта. Тем не менее, теория интересная и допускает обобщения и дальнейшее развитие.

За пределами исследования остались вопросы теории дифференциальных уравнений, хотя рассмотренная база свойств тригогиперболических функций позволяет в полной мере изучить класс уравнений, решаемых в квадратурах.

Что касается перспективы предложенной теории, то сразу отметим возможность практического использования в теории фазовых переходов и при изучении переходных процессов в электрических цепях. Введенные функции обладают уникальными свойствами. Одним из специфических свойств является монотонный характер функций six, inx, cox, osx, а их разности $six-inx,\ cox-osx$ уже дают ограниченную периодическую функцию.

Приложение

Доказательство линейной независимости функций six, inx, cox, osx

$$W[six,cox,inx,osx]=\begin{vmatrix} cox & six & osx & inx \\ inx & cox & six & osx \\ osx & inx & cox & six \\ six & osx & inx & cox \end{vmatrix}.$$

Обозначим $a=six, b=cox, c=inx, d=osx.$ Тогда

$$W=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}=(b^2-d^2)^2-(a^2-c^2)^2+4(bc-ad)(dc-ab).$$

$$W=(co^2x-os^2x)^2-(si^2x-in^2x)^2+4(cox\cdot inx-six\cdot osx)(osx\cdot inx-six\cdot cox)=$$

$$=(cox-osx)^2(cox+osx)^2-(six-inx)^2(six+inx)^2+4(cox\cdot inx-six\cdot osx+osx\cdot inx-six\cdot cox)=$$

$$=\cos^2 x\cdot ch^2x-\sin^2 x\cdot sh^2x+4(cox\cdot inx-six\cdot osx+osx\cdot inx-six\cdot cox).$$

Остается преобразовать последний член выражения. Для этого используем формулы

$$six=\frac{1}{2}(\sin x+shx)=\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1),\ inx=\frac{1}{2}(-\sin x+shx)=\frac{1}{2}(-\alpha_1+\beta_1),$$

$$cox=\frac{1}{2}(\cos x+chx)=\frac{1}{2}(\alpha_2+\beta_2),\ osx=\frac{1}{2}(-\cos x+chx)=\frac{1}{2}(-\alpha_2+\beta_2).$$

$$cox \cdot inx - six \cdot osx = \frac{1}{4}(\alpha_2 + \beta_2)(-\alpha_1 + \beta_1) - \frac{1}{4}(-\alpha_2 + \beta_2)(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{1}{2}(-\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1),$$

$$inx \cdot osx - six \cdot cox = \frac{1}{4}(-\alpha_2 + \beta_2)(-\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_2 + \beta_2)(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{1}{2}(-\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1),$$

$$4(sixosx - coxinx)(sixcox - osxinx) = (-\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)(-\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) = \alpha_1^2 \beta_2^2 - \alpha_2^2 \beta_1^2 =$$
$$= \sin^2 x \cdot ch^2 x - \cos^2 x \cdot sh^2 x.$$

Наконец,

$$W = \cos^2 x \cdot ch^2 x - \sin^2 x \cdot sh^2 x + 4(cox \cdot inx - six \cdot osx)(inx \cdot osx - six \cdot cox) =$$
$$= \cos^2 x \cdot ch^2 x - \sin^2 x \cdot sh^2 x + (\sin^2 x \cdot ch^2 x - \cos^2 x \cdot sh^2 x) =$$
$$= \cos^2 x \cdot (ch^2 x - sh^2 x) - \sin^2 x \cdot (sh^2 x - ch^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Литература

1. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – Vol. 1. – 667 p.
2. Wrede R. Theory and Problems of Advanced Calcolus / R. Wrede, M. Spiegel. – Schaum’s Series, The MacGraw-Hill Companies Inc., 2002 (First Edition 1966). – 433 p.
3. Smirnov V.I. A Course of Higher Mathematics / Smirnov V.I. – M. : The Science, 1964. – Vol. 1. – 543 p.
4. Мироненко Л.П. Тригогиперболические функции и их алгебраические свойства (I) / Л.П. Мироненко // Искусственный интеллект. – 2010. – № 3. – С. 501-509.
5. Korn G.A. Mathematical Handbook / G.A. Korn, T.M. Korn. – MacGraw Hill Book Company, 1968. – 831 p.
6. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука,1970. – Т. I. – 571 с.
7. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позднякю – М. : Изд. «ФМЛ», 1956. – Т. 1. – 472 с.
8. Apostol T.M. Calculus. Multy-Variable Calculus and Linear Algebra, with Application to Differential Equations abd Probability / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1969. – Vol. 2. – 673 p.
9. Boyce. W.E. Elementary Differential and Boundary Value Problems / W.E. Boyce, R.C. DiPrima. – John Wiley & Sons, Inc., 2001. – P. 1310.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М. : Наука, «ФМЛ», 1972. – Т. 3. – 795 с.
11. Гурса Э. Курс математического анализа / Гурса Э. – М. : Государственное технико-практическое издательство, 1933. – Т. 3. – 368 с.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики / Смирнов В.И. – М. : Наука, 1974. – Т. 2. – 479 с.

Л.П. Міроненко, І.К. Локтіонов

Тригогіперболічні функції в математичному аналізі (II)

У статті запропонована система «елементарних» функцій яка названа тригогіперболічними функціями і означена як *six, inx, cox, osx*. Ця система функцій є альтернативою до звичайних тригонометричних і гіперболічних функцій *sin x, cos x, shx, chx*. Функції введені на підставі поділення рядів Маклорена функцій *sin x, cos x* на позитивну і від’ємну частини. Так виникають чотири лінійно незалежні і аналітичні функції. У статті вивчаються алгебраїчні і аналітичні властивості тригогіперболічних функцій.

L.P. Mironenko, I.K. Loktionov

Trigohyperbolic Functions in the Mathematical Analysis (II)

A new system of "elementary" functions which are called trigohyperbolic functions and denoted with symbols *six, inx, cox, osx* is proposed in the paper. This system is alternative to usual trigonometric and hyperbolic functions *sin x, cos x, shx, chx*. New functions are introduced on basis of division Maclaurin’s series for the functions *sin x, cos x* into positive and negative parts. In the paper algebraic and analytical properties of the new functions are investigated.

Статья поступила в редакцию 19.11.2010.